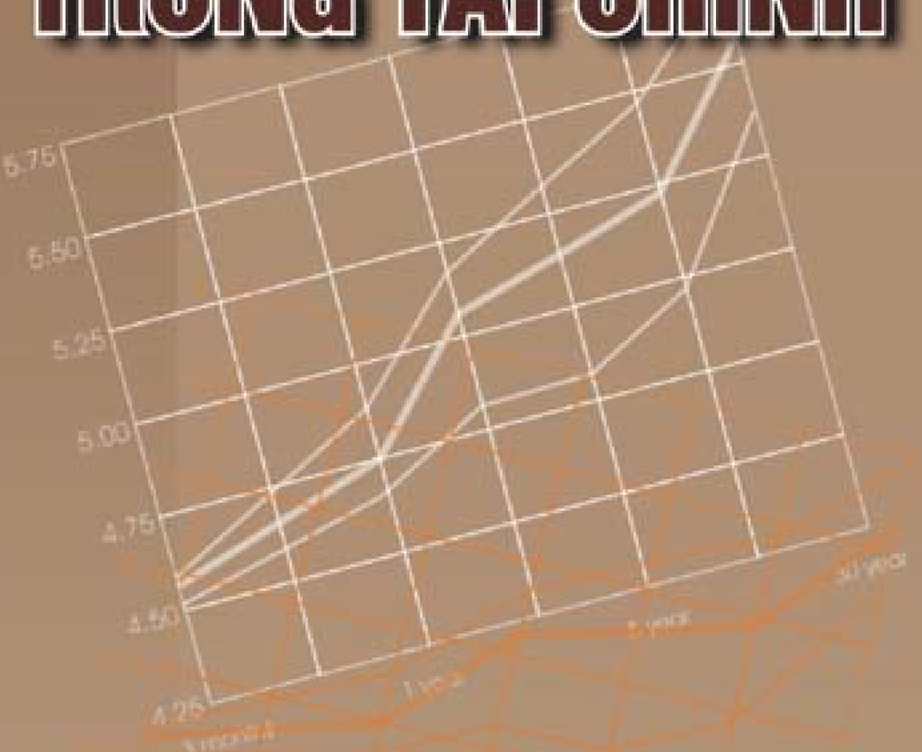
NGUYỄN VĂN HỮU
VƯƠNG QUÂN HOÀNG

CÁC PHƯƠNG PHÁP TOÁN HỌC TRONG TÀI CHÍNH



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời mở đầu

Toán học Tài chính (Financial Mathematics) là một lĩnh vực rất mới mẻ, được tăng cường nghiên cứu và ứng dụng trong khoảng 30 năm gần đây. Ở nước ta ngành Toán học Tài chính mới chính thức được mở ra cách đây ba năm ở Khoa Toán Kinh tế, trường Đại học Kinh tế Quốc dân và được giới tài chính rất quan tâm. Trong vòng 5, 7 năm gần đây ngành Toán học Tài chính đã thu hút được sự chú ý của những người làm Toán ứng dụng và đã hình thành một số nhóm nghiên cứu về Toán Tài chính ở Đại học Khoa học tự nhiên, ĐHQGHN, Viện Toán học, Đại học Kinh tế Quốc dân.

Tiếp theo cuốn sách *Nhập môn Toán học Tài chính* của tác giả Trần Hùng Thao, cuốn sách của chúng tôi với tựa đề *Các phương pháp Toán học Tài chính* nhằm cung cấp cho độc giả, những người nghiên cứu lý thuyết và ứng dụng, các sinh viên, học viên cao học và các nghiên cứu sinh những quan điểm và các phương pháp nghiên cứu cơ bản khi nghiên cứu về thị trường tài chính, một thị trường luôn biến động dưới tác động của nhiều yếu tố xác định và bất định (ngẫu nhiên).

Nội dung cơ bản của cuốn sách này bao gồm các vấn đề sau đây:

- Mô hình hoá thị trường tài chính với thời gian rời rạc và liên tục, nghiên cứu các đặc điểm của thị trường đó.
- Định giá các phái sinh chứng khoán trên các tài sản cơ bản như cổ phiếu, trái phiếu.
- Nghiên cứu cấu trúc của thị trường trái phiếu, phương pháp định giá trái phiếu dựa trên mô hình về lãi suất ngắn hạn, lãi suất tức thời.

Hai cách tiếp cận được sử dụng thường xuyên là các phương pháp của Giải tích ngẫu nhiên và các phương pháp nghiên cứu của Phương trình đạo hàm riêng.

Chúng tôi hy vọng rằng cuốn sách này sẽ giúp ích cho các độc giả muốn nghiên cứu và ứng dụng các phương pháp của Toán học Tài chính khi nghiên cứu các thị trường tài chính.

Chúng tôi chân thành cảm ơn Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội đã tạo điều kiện để cuốn sách được ra mắt bạn đọc. Đặc biệt chúng tôi chân thành cảm ơn PGS. TS. Nguyễn Thị Ngọc Quyên và ThS. Trần Minh Ngọc đã tận tình giúp đỡ chúng tôi trong việc sửa bản thảo và đóng góp những ý kiến quý báu.

Sách được xuất bản với sự tài trợ của Công ty cổ phần đối tác đầu tư Việt Nam.

Các tác giả

MỤC LỤC

Giới thiệu nội dung

1. Mở đầu

Trong những năm gần đây ngành tài chính đã thực sự trở thành một ngành "công nghiệp" then chốt có tác dụng điều chỉnh và thúc đẩy mọi hoạt động của ngành kinh tế và đã trở thành nơi hội tụ của các ý tưởng xuất phát từ các lĩnh vực tri thức và ứng dụng thực tế khác nhau. Hiện nay chúng ta đang chứng kiến một sự cộng tác chặt chẽ giữa các nhà toán học, các nhà kinh tế và các nhà tài chính trong việc ứng dụng các thành tựu toán học hiện đại vào việc nghiên cứu các mô hình kinh tế, phân tích và thấu hiểu các quy luật chi phối các hoạt động kinh tế, từ đó có những hành động và quyết sách hợp với quy luật. Đặc biệt trong 20 năm gần đây, các ngành tài chính đã thu hút sự chú ý của các nhà toán học tài năng trong lĩnh vực lý thuyết xác suất và phương trình đạo hàm riêng, nhất là sau khi công trình về *Định giá của các quyền lựa chọn và cam kết của các công ty (Pricing of options and corporate liabilities)* của Black-Scholes (1973) được công bố.

Ở Việt Nam, trong quá trình hội nhập, nền công nghiệp tài chính đã có nhiều thành tựu và việc ra đời của thị trường chứng khoán, một thị trường có tổ chức với các hàng hóa cao cấp, đòi hỏi các nhà quản lý phải có những hiểu biết sâu sắc về các hoạt động, cũng như các quy luật chi phối thị trường đó. Toán tài chính sẽ là một công cụ không thể thiếu được để các chuyên gia kinh tế và tài chính nắm vững điều hành hữu hiệu mọi hoạt động của thị trường này.

Các phần tiếp theo nhằm giới thiệu các vấn đề cơ bản nhất về các cơ chế và hoạt động của thị trường tài chính cùng một số thành tựu của ngành toán tài chính.

2. Cấu trúc của thị trường tài chính

Cấu trúc cơ bản của thị trường tài chính bao gồm các bộ phận sau đây:

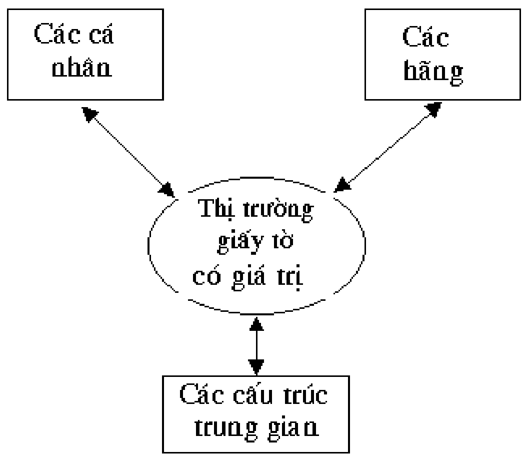
1) Các cá nhân: những cá nhân hoạt động riêng lẻ, các bà nội trợ...

2) Các hãng: các hãng kinh doanh, các công ty, các liên doanh...

3) Thị trường các chứng từ có giá trị: thị trường vốn, thị trường tiền tệ...

4) Các cấu trúc trung gian: các nhà băng, các ngân hàng công thương, ngân hàng đầu tư, các công ty bảo hiểm...

Bốn bộ phận đó liên kết với nhau theo sơ đồ dưới đây:



Như đã chỉ ra trong lý thuyết tài chính bốn bộ phận đó liên kết chặt chẽ với nhau trong đó thị trường các chứng từ có giá trị đóng vai trò then chốt. Ta hãy làm rõ hơn hoạt động của các bộ phận nói trên.

- Các cá nhân: Trong hoạt động tài chính của họ có một vấn đề trung tâm, đó là các vấn đề về tích lũy vốn và tiêu dùng. Gắn liền với vấn đề này có bài toán tối ưu về tiêu dùng và tích lũy (bài toán về phân bổ đầu tư). Dựa trên các tiên đề của Von Neumann-Morgenstern về sự hoạt động hợp lý của các cá nhân trong các điều kiện bất định người ta đã tìm cách tốt nhất để xác định việc phân bổ vốn, xác định quan hệ giữa tích lũy và tiêu dùng dựa trên một hàm lợi ích (utility function).
- Các hãng: Đó là một tổ chức có đất đai, nhà máy, công xưởng và các loại tài sản có giá trị khác như chợ, các phát minh... Hoạt động của các hãng là tổ chức, điều hành các hoạt động sản xuất, kinh doanh để đạt lợi nhuận cao nhất.
- Các cấu trúc trung gian (cấu trúc về các phương tiện tài chính): Đó là các ngân hàng công thương, ngân hàng tín dụng, các hãng bảo hiểm...
- Thị trường các chứng từ có giá trị: Đó là tập hợp các thị trường có tổ chức để mua bán, trao đổi những chứng từ (các hợp đồng) đã được tiêu

chuẩn hóa như: trái phiếu (bonds), cổ phiếu (shares, stocks), quyền lựa chọn (options), các hợp đồng trong tương lai (futures)... Như sau này ta sẽ thấy thị trường trái phiếu và thị trường các quyền lựa chọn là hai thị trường quan trọng nhất.

Dựa trên các thị trường này các hãng có thể tăng vốn của họ để phát triển sản xuất kinh doanh, các cá nhân có cơ hội và phương tiện để hoạt động tài chính trong tương lai.

Ngoài các chức năng hoạt động của nó, thị trường các chứng từ có giá trị đóng một vai trò quan trọng trong việc cung cấp các thông tin về giá cổ phiếu, lãi suất, các chỉ số tài chính,... có thể sử dụng được trong các lĩnh vực kinh tế, các cá nhân có thể sử dụng các thông tin đó để thực thi các quyết định về các dự án đầu tư về phương diện tài chính.

Người ta quan tâm đến các hoạt động trong thị trường các chứng từ có giá trị. Vì vậy ta cũng nên tìm hiểu về các loại chứng từ đó.

a) Trái phiếu: Đó là một loại hợp đồng dài hạn được phát hành bởi chính phủ, các ngân hàng, các công ty tín dụng và các thể chế tài chính khác với mục tiêu là tích lũy vốn.

Như thường lệ các trái phiếu có liên quan đến các loại chứng từ có giá trị dài hạn có lãi suất xác định hoặc lãi suất thay đổi. Một ví dụ về trái phiếu đó là tín phiếu kho bạc. Ở các nước phương Tây còn có các loại trái phiếu sau đây: trái phiếu kho bạc, trái phiếu của các hãng lớn, zero coupon bonds, coupon bonds...

b) Cổ phiếu (share, stocks): Đó là một loại chứng từ có kỳ hạn được phát hành bởi các hãng nhằm tích lũy vốn về sau. Giá của một loại cổ phiếu được xác định như trạng thái hiện hành của thị trường vốn cũng như hoạt động sản xuất tương ứng của hãng.

Người sở hữu cổ phiếu nói chung có quyền tham gia vào các hoạt động của hãng theo nguyên tắc "số phiếu bầu = số tiếng nói" và được hưởng cổ tức (dividend).

c) Quyền lựa chọn hoặc hợp đồng về quyền lựa chọn: Đó là một loại chứng từ có giá trị mà người sở hữu nó có quyền mua hoặc bán một tài sản nào đấy (ví dụ : cổ phần của một công ty) theo các điều khoản đã ghi trên hợp đồng.

Quyền lựa chọn được chia làm hai loại: loại châu Âu và loại châu Mỹ.

- Quyền lựa chọn loại châu Âu có thời hạn kết thúc xác định.
- Quyền lựa chọn loại châu Mỹ cho phép người sở hữu có quyền mua hoặc bán nhưng không bị bắt buộc tại thời điểm bất kỳ trước một thời hạn nhất định nào đấy. Hiện nay quyền lựa chọn loại châu Mỹ chiếm đa phần trong các loại hợp đồng về quyền lựa chọn.

Cần lưu ý rằng không phải quyền lựa chọn loại châu Âu chỉ có ở châu Âu và loại châu Mỹ chỉ có ở châu Mỹ.

Hơn nữa mỗi quyền lựa chọn Âu, Mỹ lại chia làm hai loại:

- Quyền lựa chọn mua (call option) cho phép người sở hữu nó mua một loại tài sản nào đấy.
- Quyền lựa chọn bán (put option) cho phép người sở hữu bán một loại tài sản nào đấy (cổ phiếu hoặc trái phiếu...).
- Warrant là một loại chứng từ có giá trị được phát hành bởi các hãng về một loại cổ phần đặc biệt nào đấy để thay đổi cái hiện có. Người sở hữu hợp đồng này có thể mua một số các tài sản nào đấy đã thoả thuận trước với một giá trị nhất định tại thời điểm bất kỳ trước một thời điểm xác định.
- Hợp đồng tương lai (future) về việc mua hoặc bán một tài sản nào đấy tại một thời điểm nhất định trong tương lai theo một giá đã thoả thuận.
- Voucher: Đó là điều khoản về tiền tệ của nhà nước cho phép người sở hữu có quyền mua một cổ phần tuỳ ý theo quy định của nhà nước.

3. Lý thuyết hiện đại về toán học trong tài chính

Trong vòng 20 năm cuối của thế kỷ XX, trong khuôn khổ kinh tế vi mô lý thuyết về tài chính và lý thuyết toán tương ứng thực chất là tính lỗ lãi, giải quyết các vấn đề về quản lý đầu tư và tăng vốn.

Sau đó lý thuyết về toán trong tài chính phát triển theo hai hướng: một hướng với các giả thiết về các điều kiện hoàn toàn xác định, hướng kia về các điều kiện bất định.

Hướng thứ nhất với các công trình của I. Fisher (1930), F. Modiliani, M. Miller (1958, 1961, 1963) xét các quyết sách tối ưu cho các cá nhân và cho các hãng. Về phương diện toán học họ giải quyết các bài toán tối ưu nhiều biến có ràng buộc.

Theo hướng thứ hai có các công trình cổ điển của H. Markowitz (1952) giành cho các bài toán về các quyết định đầu tư của các cá nhân trong các điều kiện bất định với các công cụ xác suất như phân tích trung bình và phương sai, phân tích tương quan (covariance) trong việc xác định giá của các cổ phiếu liên quan tới mức độ rủi ro trong phân bổ vốn đầu tư và đã đề ra nguyên lý nổi tiếng sau đây: ”Không mạo hiểm thì không có thu hoạch” nhưng ”không nên bỏ tất cả trứng vào cùng một rọ”.

Bước quan trọng trong việc phát triển của lý thuyết tài chính ngẫu nhiên được đánh dấu bởi các công trình của W. Sharpe (1964) ”Mô hình về định giá các tài sản vốn” trong đó đã chỉ rõ các nhà đầu tư phải hoạt động như thế nào trong thị trường ở trạng thái cân bằng.

Năm 1976 xuất hiện các công trình của S. Ross về mối liên hệ giữa các điều kiện cân bằng của thị trường và khái niệm về cơ lợi (hay độ chênh thị giá) và đã chứng tỏ rằng khi thị trường ở trạng thái cân bằng thì không cần chấp nhận tình huống cơ lợi vẫn có khả năng thu lợi mà không có rủi ro.

Năm 1973 nhờ có sự ra đời của lý thuyết hiện đại và các phương pháp thực hành về các quyền lựa chọn rất nổi tiếng, ở Mỹ vào năm đầu tiên mở thị trường chứng khoán (Chicago Board option exchange (CBOE) - thị trường chứng khoán bao gồm các hợp đồng về quyền lựa chọn tiêu chuẩn) trong ngày mở đầu tiên (26/4) đã có 911 hợp đồng call option trên 16 loại cổ phiếu. Trong năm sau hàng ngày có hơn 20000 hợp đồng. Ba năm sau hàng ngày có 100000 hợp đồng. Năm 1987 hàng ngày có 700000 hợp đồng trên mỗi loại cổ phiếu, như vậy tính tổng cộng hàng ngày trên 100 loại cổ phiếu có 70 triệu hợp đồng về quyền lựa chọn mua hoặc bán.

Công trình có tính chất cách mạng trong việc tính toán tài chính xuất hiện vào năm 1973 chính là công trình của F. Black và M. Scholes về tính giá trị hợp lý của các quyền lựa chọn ("Pricing of option and corporate liabities"). Trong công trình này các tác giả đã đưa ra một công thức nổi tiếng (công thức Black-Scholes) để tính số tiền mà người mua cần phải trả cho người bán để có quyền mua hoặc bán một loại cổ phiếu với giá trị định trước trong các điều kiện bất định, trong đó giá của loại cổ phiếu đó tuân theo mô hình khuếch tán. Trong công trình này các tác giả cũng chỉ ra phương pháp hoạt động của người bán (theo các chiến lược đảm bảo tài chính (hedging strategy) để đảm bảo chi trả cho người mua khi hợp đồng được thực hiện.

Sau công trình của Black và Scholes ra đời người ta đã áp dụng rộng rãi các phương pháp do Black và Scholes nêu ra vào các hoạt động tài chính trong thị trường của quyền lựa chọn (option).

Tiếp đó có một loạt công trình về tính giá hợp lý của các loại yêu cầu của các loại hoạt động chứng khoán với những mô hình đơn giản hoặc phức tạp khác nhau. Đáng chú ý là các công trình của R. C. Merton (1973), J. Cox, S. A. Ross, M. Rubinstein (1976, 1985), S. R. Pliska (1980, 1990), J. Cvitanic, I. Karatza (1993, 1998)...

Nhờ những đóng góp của mình trong lĩnh vực toán tài chính M. Scholes và R. C. Merton đã được nhận giải thưởng Nobel 1997.

4. Mô hình động của giá các loại cổ phiếu và trái phiếu

Vào 1900 trong luận án tiến sĩ "Théorie de la spéculation" của mình, L. Bachelier đã chỉ ra rằng sự thay đổi của giá mỗi loại chứng khoán có dạng:

$$\Delta S_t = S(t + \Delta t) - S(t) = o(\sqrt{\Delta t}).$$

Đến năm 1923 N. Wiener đã xây dựng quá trình Wiener có tính chất:

$$E(W_{t+\Delta t} - W_t)^2 = \Delta t.$$

Như vậy về trung bình $\Delta W_t \approx (\sqrt{\Delta t})$ và sau đó Alber Einstein đã nhận xét rằng hiệu quả đã được nhận xét bởi Bachelier tỏ ra hợp lý nếu giá trị S_t chịu tác động của nhân tố ngẫu nhiên Wiener là tổng hợp của vô số tác nhân kinh tế vô cùng nhỏ bé như mô hình dưới đây:

$$dS_t = a(t)dt + b(t)dW(t). \tag{4.1}$$

Năm 1965 P. Samuelson theo sáng kiến của L. Savage đã nhận xét rằng nếu giá chứng khoán tuân theo mô hình (4.1) thì nó có thể âm và không phù hợp với thực tế. Vì vậy ông ta đã đề xuất mô hình chuyển động Brown hình học để mô tả động học của giá:

$$S_t = S_0 \exp\{(a - \frac{b^2}{2})t + bW_t\} \text{ hoặc } \frac{dS_t}{S_t} = adt + bdW_t. \tag{4.2}$$

Khi đó $S_t \geqslant 0\ \forall t$ và gia số của $\ln(S_t)$ là một chuyển động Brown có dịch chuyển. Một ví dụ về mô hình (4.2) chính là giá của tài khoản ngân hàng $B = \{B_t, t \geqslant 0\}$:

$$dB_t = rB_t dt \text{ hoặc } B_t = B_0 \exp(rt), \tag{4.3}$$

r là lãi suất không đổi. Đó là một trường hợp đặc biệt của (4.2) với $b = 0$.

Đối với trường hợp thời gian rời rạc J. Cox, R. A. Ross, M. Rubinstein đã đưa ra mô hình di động ngẫu nhiên rời rạc để mô tả động học của dãy các giá chứng khoán:

$$S_n = S_{n-1}(1 + \rho_n) \text{ hoặc } S_n = S_0(1 + \rho_1)...(1 + \rho_n) \tag{4.4}$$

trong đó $\{\rho_n\}$ là dãy Bernoulli với $P\{\rho_n = u\} = p, P\{\rho_n = d\} = 1 - p$, trong đó u và d là các giá trị ứng với các trường hợp khi giá chứng khoán lên (up) và xuống (down).

Hiện nay người ta đã xét nhiều mô hình tổng quát nhưng phức tạp hơn nhiều, kể cả các mô hình khuếch tán có bước nhảy.

Một trong các mô hình đơn giản thuộc loại các mô hình nói trên là mô hình về giá của một tài khoản ngân hàng (bank account) với lãi suất không đổi hoặc thay đổi $r = \{r_t, 0 \leqslant t \leqslant T\}$. Giá $B_t(T)$ tại thời điểm t được xác định bởi:

$$B_t(T) = \exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}, B_T(T) = 1. \tag{4.5}$$

Cấu trúc giá $B_t(T)$ phụ thuộc vào quá trình lãi suất $r(t)$, quá trình này thường được giả thiết có cấu trúc khuếch tán sau đây :

$$dr(t) = a(t, r_t)dt + b(t, r_t)dW_t. \tag{4.6}$$

Một trong các quá trình lãi suất được đưa ra bởi Vasicek (1977) chính là quá trình Ornstein-Uhlenbeck

$$dr_t = a(r - r_t)dt + bdW_t, \ r \text{ là hằng số.} \tag{4.7}$$

5. Bài toán phân bổ vốn đầu tư và tính chất không cơ lợi và tính đầy đủ của một thị trường chứng khoán

5.1 Xét một dãy các quá trình ngẫu nhiên $S_0, S_1, ...S_k$, đó là các quá trình giá của $k+1$ loại chứng khoán khác nhau ứng với luật xác suất khách quan P.

Ta qui ước $S_0(t)$ là tài sản pháp định hoặc đương kim (numerary asset) và $S_0(t) > 0$ với mọi $t > 0$ và $S_0(t) = 1$. Về nguyên tắc có thể coi S_0 là trái phiếu ba năm hoặc cổ phần của một công ty lớn (như công ty IBM của Mỹ), nói chung người ta chọn $S_0(t)$ như một tài sản không có rủi ro với $P-$động học của nó có dạng

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt, S_0(0) = 1 \tag{5.1}$$

và trong trường hợp này có thể coi $S_0(t)$ như một trái phiếu kho bạc với lãi suất là $r(t)$.

Định nghĩa 5.1. *1) Một chiến lược phân bổ vốn đầu tư (CLPBVĐT) là một quá trình véc tơ dự đoán được (khi biết tất cả các thông tin về thị trường cho đến thời điểm t) $h(t) = (h_0(t), ...(h_k(t))$, trong đó $h_i(t)$ là số lượng tài sản loại i mà nhà đầu tư đang giữ. $h(t)$ còn được gọi là danh mục đầu tư (Portfolio).*

2) Quá trình trị giá ứng với h là

$$V(t, h) = \sum_{i=0}^{k} h_i(t)S_i(t). \tag{5.1}$$

3) Một CLPBVĐT h được gọi là chiến lược tự điều chỉnh tài chính hoặc tự tài trợ (self-financing) nếu

$$dV(t, h) = \sum_{i=0}^{k} h_i(t)dS_i(t) \ \ \textit{hoặc} \ \ \sum_{i=0}^{k} S_i(t)dh_i(t) = 0, \tag{5.2}$$

tức là nhà đầu tư muốn tăng đầu tư của mình vào tài sản này thì phải giảm đầu tư vào tài sản kia.

5.2 Yêu cầu tài chính và điều kiện để cho thị trường không có cơ lợi

Để hiểu rõ khái niệm yêu cầu ngẫu nhiên của sự đầu tư ta hãy xét một ví dụ sau:

Giả sử một người muốn mua một lượng trái phiếu năm năm với lãi suất 12% một năm để sau năm năm có được số vốn là 10 triệu đồng (đó là mục tiêu cần đạt được) thì người đó phải đầu tư một lượng vốn ban đầu là $V_0 = 10Tr./(1+0.12)^5$ còn nếu người đó muốn đầu tư vào tài sản $S_1(t)$ chẳng hạn thì vốn ban đầu cần phải thoả mãn điều kiện $V_0E(S_1(60)) = 10Tr$ (đơn vị thời gian là tháng) và khi đó yêu cầu (ngẫu nhiên) của anh ta là $V_0S_1(60)$ (để đơn giản ta giả thiết rằng $S_0(0) = 1$).

Định nghĩa 5.2. *1) Một biến ngẫu nhiên không âm H được gọi là một yêu cầu tài chính hoặc quyền tài chính (contingent claim).*

2) Một chiến lược đầu tư h trong khoảng thời gian $[0, T]$ được gọi là chiến lược có cơ lợi hoặc có độ chênh thị giá (arbitrage) nếu nó là chiến lược tự điều chỉnh tài chính (viết tắt là CLS-F) và hàm giá trị tương ứng với nó có tính chất:

$$V(0) = 0, V(T) \geq 0, P\{V(T) > 0\} > 0,$$

tức là chiến lược không cần vốn ban đầu mà vẫn có thu nhập. Chiến lược cơ lợi là chiến lược kiếm lời nhờ chênh lệch giá.

3) Nếu mô hình (còn được gọi là một thị trường) $\{S_0, S_1, ..., S_k\}$ đối với nó không có tồn tại chiến lược h có cơ lợi được gọi là thị trường không có cơ lợi hoặc thị trường lành mạnh (viable market).

Chú ý rằng một thị trường có cơ lợi hoặc thị trường không lành mạnh thực chất chỉ là một cơ chế làm tiền và thị trường như thế không được ưa chuộng.

Định nghĩa 5.3. *Một yêu cầu H được gọi là yêu cầu có thể đạt được nếu tồn tại một CLS-F h và một vốn ban đầu V_0 sao cho hàm trị giá tương ứng $V(t, h)$ thoả điều kiện*

$$V(0, h) = V_0, V(T, h) = H.$$

Một ví dụ về tình huống có cơ lợi là: Xét một thị trường gồm hai tài sản S_0 và S_1, trong đó S_0 là tài khoản ngân hàng với lãi suất $r > 0$ sau một đơn vị thời gian như vậy $S_{0n} = (1 + r)^n$, $n = 1, 2, \ldots, N$.

Còn S_{1n} có động học sau: $S_{1n} = (1 + \rho_1)...(1 + \rho_n)$, trong đó $d \leqslant \rho_n \leqslant u$, $n = 1, 2, \ldots, N$.

Khi đó nếu $d \leqslant r$ người ta sẽ vay vốn ngân hàng và sau đó đầu tư vào tài sản S_1, đến hạn N bán cổ phiếu với giá S_{1N} sẽ thu được một khoản lợi mà không cần vốn ban đầu bởi vì ta luôn có $S_{1N} > S_{0N}$. Ngược lại nếu $r > u$ ta có $S_{1N} < S_{0N}$ nên nếu người ta vay cổ phiếu sau đó bán đi và gửi tiền vào tài khoản ngân hàng người ta sẽ thu được một khoản lợi $S_{0N} - S_{1N}$ mà không cần đến vốn ban đầu.

Với thị trường này người ta có thể chứng minh rằng thị trường đó là lành mạnh khi và chỉ khi $d < r < u$.

Định nghĩa 5.4. *Giả sử $S_0, S_1, \ldots, S_k$ là một thị trường lành mạnh và H là một yêu cầu có thể đạt được. Khi đó vốn ban đầu tối thiểu V_0 đối với nó có tồn tại một* **CLS-F** *h sao cho $V(T, h) = H$ được gọi là phí tổn hoặc giá hợp lý của yêu cầu H, còn* **CLS-F** *h được gọi là chiến lược đảm bảo yêu cầu tài chính (hedging strategy).*

Các bài toán cơ bản đặt ra khi nghiên cứu thị trường chứng khoán là:

1) Khi nào một thị trường là lành mạnh?

2) Khi nào một yêu cầu H có thể đạt được?

3) Xác định giá hợp lý của yêu cầu H và chiến lược đảm bảo tài chính tương ứng?

4) Khi có nhu cầu tiêu dùng hoặc có nguồn vốn bổ sung hãy xác định vốn tối thiểu ban đầu V_0 và chiến lược đảm bảo tài chính và tiêu dùng?

Chú ý rằng bài toán 2) thực chất là bài toán khi nào một thị trường là đầy đủ, tức là khi nào một yêu cầu bất kỳ có thể đạt được.

Các bài toán trên đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả với mức độ tổng quát khác nhau.

6. Bài toán tính giá hợp lý của quyền lựa chọn (QLC)

Đầu tiên ta hãy xét quyền lựa chọn mua (call option). Đó là hợp đồng cho phép người giữ hợp đồng quyền mua tại một thời điểm xác định T trong tương lai một loại cổ phiếu theo giá K đã được thoả thuận. Giả sử quá trình giá của cổ phiếu đó là $S_t, 0 \leqslant t \leqslant T$. Nếu $S_T > K$ sau khi mua cổ phiếu tại thời điểm T người ta có thể bán ngay và thu được một khoản $S_T - K$. Ngược lại nếu $S_T \leqslant K$ người ta sẽ không mua cổ phiếu đó vì không thu được lợi gì. Như vậy lợi ích cũng là yêu cầu của người giữ hợp đồng về QLC là

$$H_T = \max\{S_T - K, 0\} := (S_T - K)_+$$

L. Bachelier (1900), xuất phát từ giả thiết về động học của giá S_t có dạng:

$$S_t = S_0 + \sigma dW_t, \quad t \geqslant 0,$$

trong đó $(W_t)_{t\geq 0}$ là nhiễu Wiener, đã chứng minh rằng giá hợp lý C_T của QLC được xác định bởi $C_T = E(S_T - K)_+$. Bằng một số tính toán đơn giản ta có

$$C_T = (S_0 - K)\Phi((S_0 - K)/\sigma\sqrt{T}) + \sigma\sqrt{T}\varphi((S_0 - K)/\sigma\sqrt{T}), \qquad (6.1)$$

trong đó

$$\varphi(x) = (1/\sqrt{2\pi})\exp(-x^2/2), \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt.$$

60 năm sau công trình của L. Bachelier một lần nữa người ta lại quan tâm đến việc tính giá của QLC và của các loại chứng từ có giá trị khác.

S. Spenkle (1964), J. Bones (1964), P. Samuelson (1965) đã tiếp tục vấn đề đó. Tiếp đến các công trình của F. Black, M. Scholes (1973), R. C. Merton (1973) đã thực hiện một cuộc cách mạng trong việc tính và áp dụng thực hành các loại QLC.

Mô hình thị trường QLC được xét bởi Black và Scholes là mô hình $\{B, S\}$ sau đây:

1) Giá của tài khoản ngân hàng $B = \{B_t, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ với $dB_t = rB_t dt, B_0 > 0$, r không đổi.

2) Giá của một loại cổ phiếu $S = \{S_t, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ với $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$.

Giả sử người mua mua một QLC và phải trả một số tiền là x, đó là cái giá phải trả để có được QLC. Người bán nhận được số tiền đó sẽ đầu tư vào thị trường $\{B, S\}$ với mục đích mở rộng vốn ban đầu x để đến thời điểm kết thúc hợp đồng T đủ trả cho người mua một khoản

$$H_T = \max(S_T - K, 0) := (S_T - K)_+ \qquad (6.2)$$

khi hợp đồng về QLC là hợp đồng mua (Call option).

Dựa trên thị trường $\{B, S\}$ người đầu tư (bây giờ là người bán) chọn một chiến lược đầu tư như sau: Mua π_{0t} tài khoản ngân hàng với giá B_t và π_{1t} cổ phiếu với giá S_t. Kí hiệu $\pi = \{\pi_t = (\pi_{0t}, \pi_{1t})\}$ là một chiến lược đầu tư của người bán. Khi đó trị giá vốn hiện có của nhà đầu tư tại thời điểm t là

$$V_t(\pi) = \pi_{0t}B_t + \pi_{1t}S_t. \qquad (6.3)$$

Cũng như trong mục 5, chiến lược π được gọi là chiến lược đảm bảo tài chính (hedging strategy) ứng với yêu cầu H_T nếu nó là chiến lược tự điều chỉnh tài chính π thỏa mãn điều kiện $B_t d\pi_{0t} + S_t d\pi_{1t} = 0$ và hầu chắc chắn ta có: $V_t(\pi) \geqslant H_T$ và $V_0(\pi) = x$. Số x nhỏ nhất, được ký hiệu bởi C_T, sao cho có tồn tại CL đảm bảo tài chính π^* với $V_0(\pi^*) = C_T, V_T(\pi^*) = H_T$ gọi là giá đúng hoặc giá hợp lý của QLC.

Bài toán cơ bản của lý thuyết định giá QLC là tính giá hợp lý C_T và xác định CL đảm bảo tài chính tương ứng π^* như trên.

Kết quả nổi tiếng của Black và Scholes (1973) về giải bài toán nói trên cho QLC mua cổ phiếu tiêu chuẩn loại Châu Âu với hàm chi trả $H_T = (S_T - K)_+$.

Giá hợp lý C_T được cho bởi:

$$C_T = S_0\Phi(d_+) - K\exp(-rT)\Phi(d_-), \tag{6.4}$$

trong đó

$$d_\pm = \{\ln(S_0/K) + T(r \pm \sigma^2/2\}/\sigma\sqrt{T} \tag{6.5}$$

và đã xây dựng được một chiến lược π^* sao cho

$$V_T(\pi^*) = (S_T - K)_+.$$

Một điều lý thú là giá hợp lý C_T không phụ thuộc vào μ (hệ số của phần xu thế của giá S_t và cũng là lợi suất trung bình khi đầu tư vào chứng khoán S).

Tuy mô hình $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ về giá cổ phiếu chưa phải hoàn toàn phù hợp với thực tiễn, như Black nhận xét, nhưng người ta vẫn chấp nhận nó vì người ta hiểu được nó và biết phải làm gì. Hơn nữa nếu coi nó như một xấp xỉ ban đầu người ta có thể điều chỉnh mô hình một cách hợp lý nhất.

Các hạn chế cơ bản của mô hình thị trường các QLC (BS) của Black và Scholes là:

1) Lãi suất của tài khoản ngân hàng là hằng số (trên thực tế nó thay đổi theo thời gian, thậm chí nó là ngẫu nhiên).

2) μ và σ là hằng số (thường chúng thay đổi theo thời gian và là ngẫu nhiên).

3) Không có các hạn chế về độ lớn và dấu của các π_{ot}, π_{it}.

4) Các chiến lược được giả định là tự điều chỉnh tài chính (self-financing), chưa tính đến việc tiêu dùng và cổ tức.

5) Chưa tính đến chi phí giao dịch (transaction cost).

Vấn đề trở nên khó khăn nhất khi $\sigma = \sigma(t, S_t)$ phụ thuộc cả vào thời gian và biến pha S_t nhất là trong việc phân tích thống kê trong điều kiện thông tin không đầy đủ khi người ta chỉ quan sát được S_t tại thời điểm mở, đóng trên sàn giao dịch chứng khoán.

Các công trình gần đây của M. Shweizer (1995, 1998), M. Shal (1994, 1999), I. Karatzas (1998) đã nghiên cứu khắc phục ít nhiều các hạn chế nói trên.

7. Các bài toán về thống kê

Một trong những bài toán mà người ta cần phải giải quyết đầu tiên là bài toán nhận dạng cấu trúc động học của quá trình lãi suất $r(t)$, các quá trình giá của các loại chứng khoán $S_i(t), i = 1...k$, trong điều kiện thông tin không đầy đủ. Độc giả có thể tìm hiểu vấn đề này trong các công trình của Harrison-Phiska (1981), Modilioni-Miller (1958).

8. Cấu trúc của sách

Chương 1: Các mô hình rời rạc

Trong chương này xét chi tiết các mô hình thị trường tài chính nhiều thời kỳ với nhiều tài sản được kinh doanh, phân tích các đặc trưng của một thị trường lành mạnh, đầy đủ và xét việc định giá hợp lý các yêu cầu tài chính, đặc biệt xét các quyền lựa chọn loại châu Âu.

Chương 2: Bài toán dừng tối ưu và quyền lựa chọn loại châu Mỹ

Chương này dành riêng cho việc khảo sát việc định giá và xác định thời điểm thực thi tối ưu quyền lựa chọn loại châu Mỹ, loại quyền lựa chọn rất phổ biến trên thị trường chứng khoán.

Chương 3: Phương trình vi phân ngẫu nhiên

Chương này được trình bày với các khái niệm và các công thức xác định tích phân ngẫu nhiên Ito, các quá trình Ito, các phép tính vi phân Ito và phương trình vi phân ngẫu nhiên Ito. Các kết quả của chương này rất cần thiết cho việc mô hình hoá các thị trường tài chính bất định với thời gian liên tục cũng như việc phân tích các đặc trưng cơ bản của thị trường.

Chương 4: Mô hình Black-Scholes

Mô hình Black-Scholes là mô hình cơ bản nhất để mô tả thị trường tài chính có một chứng khoán không rủi ro và một chứng khoán có rủi ro. Công thức nổi tiếng của Black-Scholes trong việc định giá hợp lý các quyền lựa chọn mua và bán được trình bày chi tiết trong chương này.

Chương 5: Mô hình khuếch tán

Mô hình khuếch tán là sự mở rộng của mô hình Black-Scholes. Việc định giá các yêu cầu tài chính trong mô hình này đưa đến việc giải các phương trình đạo hàm riêng loại parabolic. Trong chương này cũng chỉ ra một ứng dụng của lý thuyết Black-Scholes trong việc định giá các khoản nợ hoặc trái phiếu có rủi ro của các công ty có tính đến khả năng phá sản.

Chương 6: Mô hình hoá các quá trình lãi suất

Mô hình hoá các quá trình lãi suất trình bày mô hình lãi suất trái phiếu, nêu ra phương phái định giá trái phiếu khi biết mô hình động học của lãi suất.

Cuối mỗi chương đều có các bài tập có hướng dẫn hoặc có lời giải tóm tắt nhằm xét chi tiết hơn các bài toán định giá các yêu cầu tài chính phức tạp hoặc đơn giản như các quyền lựa chọn loại châu Á, quyền lựa chọn chuyển đổi các chứng khoán, chuyển đổi các ngoại tệ, quyền lựa chọn trên các quyền lựa chọn,...

Đọc giả mới đọc lần đầu có thể bỏ qua các chi tiết chứng minh của các kết quả hoặc các định lý, nhưng cần nắm chắc các khái niệm và ý nghĩa về mặt kinh tế và tài chính của các khái niệm đó.

Chương 1

Mô hình rời rạc

Nội dung của chương này là trình bày các khái niệm cơ bản của lý thuyết về quyền lựa chọn với mô hình toán học rất đơn giản cho trường hợp thời gian rời rạc. Mô hình Cox-Ross-Rubinstein (mô hình nhị thức) sẽ là mô hình được quan tâm đặc biệt.

1.0 Vấn đề định giá và bảo hộ quyền tài chính

Trong mục này ta sẽ xét một ví dụ đơn giản và qua đó ta sẽ phác họa những vấn đề cơ bản của lý thuyết định giá và bảo hộ (bảo đảm) quyền tài chính (hedging a contingent claim).

Giả sử có hai loại tài sản:

Tài sản thứ nhất là trái phiếu nhà nước với giá là một đơn vị tiền tệ tại thời điểm $t = 0$ và giá là $1 + r$ tại thời điểm $t = 1$ trong đó r là lãi suất sau một thời kỳ.

Tài sản thứ hai là tài sản có rủi ro (chẳng hạn, cổ phiếu của một công ty), với giá là S_0 tại thời điểm $t = 0$ và giá là S_1 tại thời điểm $t = 1$. Thông thường S_1 là một biến ngẫu nhiên. Để đơn giản ta giả thiết rằng S_1 chỉ nhận 2 giá trị $S_0(1 + u)$ và $S_0(1 + d)$ với các xác suất là p và $1 - p$ tương ứng ($d < u$), tức là:

$$P\{S_1 = S_0(1 + u)\} = p, P\{S_1 = S_0(1 + d)\} = 1 - p$$

trong đó u và d là lượng gia tăng tương đối của tài sản có rủi ro.

Ta hãy xét một phái phiếu (derivative) với lượng chi trả tại thời điểm $t = 1$ là $C_1 = H(S_1)$ với H là một hàm nào đấy trên $[0, +\infty)$.

Một ví dụ về phái phiếu là quyền lựa chọn mua tiêu chuẩn loại châu Âu (Standard Call option): Đó là một loại hợp đồng mà người giữ nó có quyền mua một loại cổ phiếu với giá định trước là K tại thời điểm 1. Người viết hợp đồng nhận từ người mua hợp đồng một khoản nào đấy. Sau khi có hợp đồng nếu giá cổ phiếu là $S_1 \leqslant K$, người giữ hợp đồng không thực thi việc mua cổ phiếu vì ông ta không thu được gì. Ngược lại nếu $S_1 > K$ người giữ hợp đồng sẽ mua cổ phiếu với giá là K và có thể bán ngay với giá S_1 và thu một khoản lợi nhuận là $S_1 - K$. Như vậy khoản chi trả khi hợp đồng được thực thi là

$$C_1 = \max(0, S_1 - K) := (S_1 - K)_+.$$

Ngược lại khi hợp đồng quyền lựa chọn là hợp đồng bán (put option) cho phép người giữ hợp đồng có quyền bán hoặc không bán một loại cổ phiếu với giá là K tại thời điểm 1 và khoản chi trả khi hợp đồng được thực hiện là

$$P_1 = \max(0, K - S_1) := (K - S_1)_+.$$

Thông thường nhà đầu tư lập một danh mục đầu tư là (Φ^0, Φ^1) trong đó Φ^0 là số trái phiếu và Φ^1 là số cổ phiếu mà nhà đầu tư muốn giữ. Không có ràng buộc nào đặt lên Φ^0 và Φ^1, Φ^0 và Φ^1 có thể âm.

$\Phi^0 < 0$ có nghĩa là nhà đầu tư đã vay một khoản để mua trái phiếu, $\Phi^1 < 0$ có nghĩa là nhà đầu tư đã nợ Φ^1 cổ phiếu hoặc bán khống các cổ phiếu khác. (Φ^0, Φ^1) được gọi là một danh mục hoặc chiến lược đầu tư và giá trị của nó tại $t = 1$ được xác định bởi biểu thức

$$V_1(\Phi) = \Phi^0(1 + r) + \Phi^1 S_1. \tag{1.0.1}$$

Định nghĩa 1.0.1. *Chiến lược đầu tư $\Phi = (\Phi^0, \Phi^1)$ được gọi là chiến lược đảm bảo yêu cầu tài chính (yêu cầu chi trả) $C_1 = H(S_1)$ nếu $V_1(\Phi) = H(S_1)$ hoặc một cách tương đương:*

$$\begin{aligned} \Phi^0(1 + r) + \Phi^1 S_0(1 + u) &= H(S_0(1 + u)), \\ \Phi^0(1 + r) + \Phi^1 S_0(1 + d) &= H(S_0(1 + d)). \end{aligned} \tag{1.0.2}$$

Từ (1.0.2), $\Phi = (\Phi^0, \Phi^1)$ phải thỏa mãn:

$$\Phi^0 = \frac{(1 + u)H(S_0(1 + d)) - (1 + d)H(S_0(1 + u))}{(1 + r)(u - d)}$$

$$\Phi^1 = \frac{H(S_0(1 + u)) - H(S_0(1 + d))}{S_0(u - d)}. \tag{1.0.3}$$

Còn giá trị tại thời điểm 0 của chiến lược đó là:

$$\begin{aligned} V_0(\Phi) &= \Phi^0 + \Phi^1 S_0 \\ &= \frac{1}{1 + r}\{\pi H(S_0(1 + u) + (1 - \pi)H(S_0(1 + d))\} \end{aligned} \tag{1.0.4}$$

trong đó

$$\pi = \frac{r-d}{u-d}; 1-\pi = \frac{u-r}{u-d}. \tag{1.0.5}$$

Nếu $d < r < u$ thì $\pi \in (0,1)$ và $(\pi, 1-\pi)$ có thể coi là một phân bố xác suất của S_1. Trong trường hợp này từ (1.0.4) ta có thể viết

$$V_0(\Phi) = E^{\pi}\widetilde{H}(S_1) \text{ với } \widetilde{H}(S_1) = H(S_1)/(1+r) \tag{1.0.6}$$

$$\widetilde{S_0} = S_0 = \pi\frac{S_0(1+u)}{1+r} + (1-\pi)\frac{S_0(1+d)}{1+r} = E^{\pi}\widetilde{S_1}. \tag{1.0.7}$$

Với $\widetilde{S_1} = S_1/(1+r)$ là giá chiết khấu của chứng khoán.

Định nghĩa 1.0.2. *Độ đo xác suất* $(\pi, 1-\pi)$ *thỏa mãn* (1.0.5) *được gọi là độ đo xác suất trung hoà rủi ro (khi $d < r < u$).*

Chú ý rằng khi $r \notin (d, u)$ thì luôn luôn có cách đầu tư có lợi, không có rủi ro và không cần vốn ban đầu. Trong trường hợp này ta nói rằng thị trường có tình huống cơ lợi (arbitrage opportunity) trong đó người ta có thể thu lợi nhờ sự chênh lệch giá chứng khoán qua việc mua đi bán lại.

Thậy vậy, nếu $r \leqslant d < u$ thì ta vay ngân hàng S_0 đơn vị tiền tệ và mua một cổ phiếu với giá là S_0 tại thời điểm $t = 0$. Đến thời điểm 1 khi bán cổ phiếu sẽ thu được một khoản là $S_1 = S_0(1+d)$ hoặc $S_1 = S_0(1+u)$ và phải trả cho ngân hàng một khoản là $S_0(1+r)$ và vẫn thu lợi là $S_1 - S_0(1+r) > 0$ với xác suất dương không cần phải đầu tư một khoản tiền ban đầu nào.

Ngược lại nếu $d < u \leqslant r$ ta có thể vay một cổ phiếu với giá là S_0 và mua S_0 trái phiếu, đến thời điểm 1 thu được khoản $S_0(1+r)$ và phải trả một cổ phiếu giá $S_1 = S_0(1+d)$ hoặc $S_1 = S_0(1+u)$ và thu được khoản lợi là $S_0(1+r) - S_1 > 0$ và không cần phải bỏ vốn miễn là biết mua đi bán lại chứng khoán để thu được lời nhờ chênh lệch giá.

Dễ dàng thấy rằng giá ban đầu của yêu cầu H được xác định bởi công thức (1.0.6) là giá hợp lý. Thậy vậy, nếu giá ban đầu là $C > V_0$ thì chỉ cần dành V_0 đồng vốn và sử dụng chiến lược (1.0.3) ta có thể đủ chi trả $C_1 = H(S_1)$ và như vậy còn dư $C - V_0$. Ngược lại nếu giá ban đầu là $C < V_0$ thì không có một chiến lược đầu tư nào thỏa mãn (1.0.1).

Điều đáng chú ý là giá ban đầu hợp lý V_0 xác định bởi (1.0.4) không phụ thuộc vào phân bố khách quan $(p, 1-p)$ của S_1 mà chỉ phụ thuộc vào "xác suất trung hoà rủi ro" $(\pi, 1-\pi)$. Độ đo xác suất $(\pi, 1-\pi)$ chính là độ đo với nó $\widetilde{S_1}$ thỏa mãn hệ thức (1.0.7), nói khác đi $(\widetilde{S_0}, \widetilde{S_1})$ là một martingale. Người ta còn gọi $\pi, 1-\pi$ là độ đo martingale.

Như vậy nếu $r < d < u$ thì tồn tại "xác suất rủi ro trung tính" và không có tình huống cơ lợi, tức là muốn đạt yêu cầu $H(S_1) > 0$ với xác suất dương thì vốn đầu tư ban đầu phải là $V_0 > 0$. Việc chứng minh chặt chẽ điều khẳng định trên sẽ được thực hiện trong mục tiếp theo.

1.1 Mô hình thị trường quyền lựa chọn rời rạc

1.1.1 Các hoạt động tài chính

Cho mô hình thị trường tài chính được xác định trong không gian xác suất hữu hạn $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ được trang bị bởi một lọc $\{\mathcal{F}_n\}$, điều đó có nghĩa là cho trước một dãy $\sigma-$đại số không giảm các tập con của $\Omega : \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset ... \subset \mathcal{F}_N \subset \mathcal{F}$, trong đó $\mathcal{F}_n$ là họ $\sigma-$đại số chứa tất cả các thông tin sử dụng được cho đến thời điểm n chẳng hạn giá $S_0, S_1, ..., S_n$ của cổ phiếu. Như vậy $\mathcal{F}_n$ là họ các biến cố xảy ra cho đến thời điểm $n(n = 0 \div N)$.

Giả sử $\mathcal{F}_0$ là $\sigma-$đại số tầm thường, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ họ tất cả các tập con của Ω), Ω tập hữu hạn và $P(\{\omega\}) > 0, \forall\omega \in \Omega$. Giả sử trên thị trường có $d + 1$ loại chứng khoán đang hoạt động với giá tại thời điểm n là $S_n^0, S_n^1, ..., S_n^d$ trong đó $S_n^i > 0(i = 0 \div d)$ và đo được đối với $\mathcal{F}_n$. Những người đầu tư trên thị trường đó biết được các giá trị $S_n^0, S_n^1, ..., S_n^d$ tại thời điểm hiện tại và quá khứ nhưng không biết các giá trị của nó trong tương lai.

Chứng khoán S_n^0 được coi là chứng khoán không có rủi ro (trái phiếu nhà nước chẳng hạn). Các chứng khoán $S_n^1, ..., S_n^d$ là các chứng khoán có rủi ro.

Ta quy ước $S_0^0 = 1$ (giá trị đầu tiên của chứng khoán tại thời điểm ban đầu). Nếu S_n^0 là tài khoản ngân hàng với lãi suất r thì $S_n^0 = (1+r)^n$. Hệ số $\beta_n = 1/S_n^0$ được gọi là hệ số chiết khấu (hệ số giảm giá) tại thời điểm n.

1.1.2 Các chiến lược đầu tư

Định nghĩa 1.1.1. *Một chiến lược đầu tư hoặc danh mục đầu tư là một dãy các véctơ ngẫu nhiên*

$$\Phi = \left\{ (\Phi_n^0, \Phi_n^1, ..., \Phi_n^d) := \Phi_n \right\}_{n=0 \div N}$$

với giá trị $\in R^{d+1}$ *trong đó* Φ_n^i *là lượng chứng khoán loại i mà người đầu tư đang giữ,* $(i = 0 \div d)$.

Giả sử Φ_0^i là $\mathcal{F}_0$ đo được, Φ_n^i là $\mathcal{F}_{n-1}$ đo được $(i = 0 \div d)$, điều đó có nghĩa là chiến lược Φ_n tại thời điểm n được xây dựng dựa trên tất cả các thông tin cho đến thời điểm $n-1$ (ví dụ sự lên xuống của các loại chứng khoán cho đến thời điểm $n-1$).

Chiến lược Φ được coi là chiến lược phân bố vốn đầu tư hoặc một danh mục đầu tư.

Định nghĩa 1.1.2. *Giá trị ứng với chiến lược Φ tại thời điểm n được cho bởi:*

$$V_n(\Phi) = \Phi_n S_n := \sum_{i=0}^{d} \Phi_n^i S_n^i.$$

Và giá trị chiết khấu là:

$$\tilde{V}_n(\Phi) = V_n(\Phi)/S_n^0 = \beta_n(\Phi_n S_n) = \Phi_n \tilde{S}_n$$

với $\tilde{S}_n = (1, S_n^1/S_n^0, ..., S_n^d/S_n^0)$.

Định nghĩa 1.1.3. *Chiến lược Φ được gọi là chiến lược tự tài trợ hoặc tự điều chỉnh tài chính (self-financing) nếu:*

$$\sum_{i=0}^{d} S_n^i(\Phi_{n+1}^i - \Phi_n^i) = 0 \Leftrightarrow S_n \Delta\Phi_{n+1} = 0. \tag{1.1.1}$$

Nhận xét. Từ (1.1.1) ta có

$$\begin{aligned}\Delta V_n(\Phi) &= V_n(\Phi) - V_{n-1}(\Phi)\\ &= \Phi_n S_n - \Phi_{n-1}S_{n-1} = \Phi_n(S_n - S_{n-1}) + (\Phi_n - \Phi_{n-1})S_{n-1}\\ &= \Phi_n \Delta S_n + \Delta\Phi_n S_{n-1} = \Phi_n \Delta S_n.\end{aligned}$$

Tương tự

$$\Delta\tilde{V}_n(\Phi) = \sum_{i=1}^{d} \Phi_n^i \Delta\tilde{S}_n^i = \Phi_n \Delta\tilde{S}_n \tag{1.1.2}$$

trong đó $\Delta S_n^i = S_n^i - S_{n-1}^i$.

Hệ thức (1.1.1) chứng tỏ rằng muốn tăng đầu tư vào chứng khoán i ta phải giảm đầu tư vào các chứng khoán khác và không có thêm nguồn vốn bổ sung hoặc cũng không có sử dụng vốn vào việc tiêu dùng.

Từ (1.1.2) ta thấy sự gia tăng của hàm giá trị $\tilde{V}_n(\Phi)$ phụ thuộc vào sự gia tăng của các chứng khoán rủi ro có chiết khấu $\tilde{S}_n^i, i = 1 \div d)$.

Ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.1.1. *Các điều kiện sau là tương đương:*

(i) Chiến lược Φ là tự điều chỉnh tài chính.

(ii) $\forall n = 1 \div N$

$$V_n(\Phi) = V_0(\Phi) + \sum_{j=1}^{n}(\Phi_j \Delta S_j), \Delta S_j = S_j - S_{j-1}.$$

(iii) $\forall n = 1 \div N$ *ta có:*

$$\tilde{V}_n(\Phi) = V_0(\Phi) + \sum_{j=1}^{n} \Phi_j \Delta \tilde{S}_j$$

trong đó $\Delta \tilde{S}_j = \tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1} = \beta_j S_j - \beta_{j-1} S_{j-1}$.

Chứng minh. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) suy ra trực tiếp từ định nghĩa 1.1.3.

Để chứng minh (ii)$\Leftrightarrow$ (iii) ta chú ý:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_n(\Phi) - \tilde{V}_{n-1}(\Phi) &= \Phi_n \tilde{S}_n - \Phi_{n-1} \tilde{S}_{n-1} \\ &= \Phi_n(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}) + (\Phi_n - \Phi_{n-1})\tilde{S}_{n-1} \\ &= \Phi_n . \Delta \tilde{S}_n + \tilde{S}_{n-1} \Delta \Phi_n = \Phi_n \Delta \tilde{S}_n\end{aligned}$$

bởi vì do (1.1.1) nên $\tilde{S}_n \Delta \Phi_n = 0$ và $\tilde{V}_0(\Phi) = V_0(\Phi)/S_0^0 = V_0(\Phi)$ nên (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Mệnh đề 1.1.2. *Ứng với mọi quá trình* $\mathcal{F}_n$*–dự báo được* $(\Phi_n^1, ..., \Phi_n^d)$ *và mọi giá trị ban đầu* V_0 *tồn tại quá trình dự báo* $\Phi_n = (\Phi_n^0, ..., \Phi_n^d)$ *là chiến lược tự điều chỉnh tài chính.*

Chứng minh. Từ điều kiện (1.1.1) suy ra:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_n(\Phi) &:= (\Phi_n^0) + \Phi_n^1 \tilde{S}_n^1 + ... + \Phi_n^d \tilde{S}_n^d \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^{n} (\Phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + ... + \Phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d).\end{aligned}$$

Hệ thức đó sẽ xác định một cách duy nhất Φ_n^0 từ $\Phi_j^1, ..., \Phi_j^d$, $1 \leqslant j \leqslant n$ và V_0. Vấn đề còn lại là chứng minh rằng Φ_n^0 là dự báo được. Từ hệ thức trên ta có:

$$\begin{aligned}\Phi_n^0 &= V_0 + \sum_{j=1}^{n} (\Phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + ... + \Phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d) - \Phi_n^1 \tilde{S}_n^1 - ... - \Phi_n^d \tilde{S}_n^d \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (\Phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + ... + \Phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d) + \Phi_n^1 (\tilde{S}_n^1 - \tilde{S}_{n-1}^1) + ... + \\ &\quad + \Phi_n^d (\tilde{S}_n^d - \tilde{S}_{n-1}^d) - \Phi_n^1 \tilde{S}_n^1 - ... - \Phi_n^d \tilde{S}_n^d \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (\Phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + ... + \Phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d) - \Phi_n^1 \tilde{S}_{n-1}^1 - ... - \Phi_n^d \tilde{S}_{n-1}^d \\ &= \tilde{V}_{n-1}(\Phi) - \sum_{j=1}^{d} \Phi_n^i \tilde{S}_{n-1}^i \text{là } \mathcal{F}_{n-1} \text{ đo được.}\end{aligned}$$

Vậy Φ_n^0 là dự báo được (điều phải chứng minh).

1.1.3 Chiến lược chấp nhận được và cơ lợi

Ta không đặt điều kiện nào về dấu của các Φ_n^i. Ta hiểu $\Phi_n^0 < 0$ nghĩa là cần phải vay một lượng Φ_n^0 để đầu tư vào chứng khoán không có rủi ro, còn $\Phi_n^i < 0$ đối với $i \in \{1, ...d\}$ có nghĩa là có một khoản nợ Φ_n^i trên chứng khoán có rủi ro thứ i (có khi phải bán chứng khoán khác để trang trải). Người ta cho phép vay hoặc bán chứng khoán khác để trang trải nhưng đòi hỏi giá trị ứng với chiến lược Φ tại thời điểm n là $V_n(\Phi) \geqslant 0, \forall n = 0 \div N$.

Định nghĩa 1.1.3. *Chiến lược Φ gọi là chấp nhận được nếu nó là chiến lược tự điều chỉnh tài chính và nếu $V_n(\Phi) \geqslant 0, \forall n = 0 \div N$.*

Định nghĩa 1.1.4. *Một chiến lược được gọi là có cơ lợi (arbitrage opportunity) nếu nó là chiến lược chấp nhận được sao cho $V_0(\Phi) = 0$ nhưng $V_N(\Phi) \geqslant 0$ và $P\{V_N(\Phi) > 0\} > 0$. (Tức là chiến lược không cần vốn ban đầu mà vẫn có thu nhập).*

Phần lớn các mô hình đều loại trừ tình huống có cơ lợi. Phần sau sẽ đưa ra đặc điểm của mô hình không có cơ lợi (không tồn tại chiến lược có cơ lợi) nhờ khái niệm martingale.

1.2 Martingale và cơ lợi

Để xác định mối liên hệ giữa tình huống có cơ lợi và khái niệm martingale ta đưa ra khái niệm về martingale trên không gian xác suất hữu hạn.

1.2.1 Martingale và phép biến đổi các martingale

Xét không gian xác suất hữu hạn $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ với bộ lọc $\{\mathcal{F}_n, n = 0 \div N\}$. Dãy các biến ngẫu nhiên $\{X_n, n = 0 \div N\}$ được gọi là tương thích (phù hợp) với lọc $\{\mathcal{F}_n, n = 0 \div N\}$ (viết tắt, $\{\mathcal{F}_n\}-$tương thích) nếu X_n là $\mathcal{F}_n-$đo được với mọi $n = 0, 1, ..., N$.

Định nghĩa 1.2.1. *Dãy tương thích $\{M_n\}$ các biến ngẫu nhiên thực được gọi là:*

i) Một martingale nếu $E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n, n \leqslant N - 1$.

(ii) Một martingale trên nếu $E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leqslant M_n, n \leqslant N - 1$.

(iii) Một martingale dưới nếu $E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geqslant M_n, n \leqslant N - 1$.

Định nghĩa đó có thể mở rộng cho véctơ ngẫu nhiên, ví dụ véctơ $M_n \in R^n$ được gọi là martingale nếu mọi thành phần M_n^i của nó đều là martingale (chi tiết xem [1]).

Trong thị trường tài chính nếu S_n là martingale thì ước lượng tốt nhất của S_{n+1} là S_n.

Định nghĩa 1.2.2. *Một dãy $\{H_n, n = 0 \div N\}$ được gọi là dự báo được nếu H_n là $\mathcal{F}_{n-1}$ đo được với mọi $n = 1, ..., N$.*

Mệnh đề 1.2.1. *Giả sử $\{M_n, n = 0 \div N\}$ là $\{\mathcal{F}_n\}-$phù hợp và $\{\Phi_n\}$ là dãy dự báo được đối với lọc $\Im = \{\mathcal{F}_n, n = 0 \div N\}$. Khi đó dãy $\{X_n\}$ với $X_n = \Phi_0 M_0 + \sum_{j=1}^{n} \Phi_j \Delta M_j$ là martingale khi và chỉ khi $\{M_n\}$ là $\Im-$martingale.*

(X_n) đôi khi được gọi là biến đổi của martingale (M_n) bởi dãy (Φ_n).

Một hệ quả của Mệnh đề 1.2.1 là: Trong mô hình thị trường tài chính nếu $\{\tilde{S}_n^i, i = 1 \div d\}$ là martingale đối với độ đo xác suất Q và với lọc $\Im$ thì $E(\tilde{V}_n(\Phi))$ trùng với $V_0(\Phi)$ (vì $\tilde{V}_n(\Phi)$ là biến đổi martigale của $\tilde{S}_n$).

Chứng minh Mệnh đề 1.2.1. Ta có $\Delta X_n = X_n - X_{n-1} = \Phi_n \Delta M_n$. Vì $\{\Phi_n\}$ là dãy $\Im-$dự báo được, theo tính chất của kỳ vọng có điều kiện:

$$E(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = E(\Phi_n \Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \Phi_n E(\Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0.$$

1.2.2 Thị trường tài chính lành mạnh

Xét thị trường tài chính trong mục 1.1.

Định nghĩa 1.2.3. *Một thị trường tài chính là lành mạnh khi và chỉ khi không tồn tại danh mục đầu tư cơ lợi (có độ chênh thị giá).*

Định lý 1.2.1. *Thị trường là lành mạnh khi và chỉ khi tồn tại một độ đo P^* tương đương với độ đo P và hàm giá trị chiết khấu $\{\tilde{V}_n(\Phi)\}$ là $P^*_\Im-$martingale hoặc một cách tương đương $\{\tilde{S}_n^i\}$ là $P^*_\Im-$martingale.*

Chứng minh. Đầu tiên ta chứng minh điều kiện đủ: Giả sử tồn tại $P^* \sim P$ và $\tilde{V}_n(\Phi)$ là $P^*_\Im-$martingale. Ta chứng minh thị trường là lành mạnh.

Thật vậy, giả sử $V_0 = 0$ và $V_N(\Phi) \geqslant 0$. Theo Mệnh đề 1.1.1 ta có:

$$\tilde{V}_n(\Phi) = V_0(\Phi) + \sum_{j=1}^{n} \Phi_j \Delta \tilde{S}_j$$

nên $E^*(\tilde{V}_N(\Phi)) = 0$. Kết hợp với giả thiết $\tilde{V}_N(\Phi) \geqslant 0$ suy ra $\tilde{V}_N(\Phi) = 0$ P^*-h.c.c. Và vì $P^* \sim P$ nên $V_N(\Phi) = 0 \quad P-$hầu chắc chắn. Vậy không thể tồn tại chiến lược cơ lợi nên thị trường là lành mạnh.

Chứng minh điều kiện cần phức tạp hơn.

(i) Xét $(\Phi_n^i, ..., \Phi_n^d)$ là quá trình dự báo được và xét các quá trình xác định bởi:

$$\tilde{G}_n(\Phi) = \sum_{j=1}^{n} (\Phi_j^1.\Delta\tilde{S}_j^1 + ... + \Phi_j^d.\Delta\tilde{S}_j^d).$$

Quá trình đó là thu nhập có chiết khấu tích luỹ tại thời điểm n của mỗi chiến lược tự điều chỉnh tài chính ứng với các lượng đầu tư $(\Phi_n^i, ..., \Phi_n^d)$ trên các chứng khoán có rủi ro.

Theo Mệnh đề 1.1.2 có tồn tại duy nhất một quá trình (Φ_n^0) sao cho $(\Phi_n^0, \Phi_n^1, ..., \Phi_n^d)$ là tự điều chỉnh tài chính và với giá trị ban đầu $V_0 = 0$. Khi đó $\tilde{G}_n(\Phi)$ là giá trị chiết khấu tại thời điểm n của chiến lược đó. Từ giả thiết về tính lành mạnh của thị trường nếu $\tilde{G}_n(\Phi) \geqslant 0, \forall n = 1 \div N$ thì $\tilde{G}_N(\Phi) = 0$.

Ký hiệu Γ là nón lồi các biến ngẫu nhiên $\xi \geqslant 0$ và khác 0.

Bổ đề sau đây chứng tỏ rằng không cần có giả thiết $\tilde{G}_n(\Phi) \geqslant 0, \forall n = 1 \div N$ ta vẫn có $\tilde{G}_n(\Phi) \notin \Gamma$.

Bổ đề 1.2.1. *Nếu thị trường là lành mạnh thì với mọi quá trình dự báo được* $(\Phi^1, ...\Phi^d)$ *ta có* $\tilde{G}_n(\Phi) \notin \Gamma$.

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng có một n sao cho $\tilde{G}_n(\Phi) \in \Gamma$. Khi đó sẽ dẫn đến mâu thuẫn với tính lành mạnh của thị trường. Thật vậy, đặt $n = \sup\{k | P(\tilde{G}_k(\Phi) > 0) > 0\}$. Ta có:

$$n \leqslant N - 1; P(\tilde{G}_n(\Phi) > 0) > 0; \tilde{G}_m(\Phi) \geqslant 0, \forall m > n.$$

Xét quá trình đầu tư mới Ψ như sau:

$$\Psi_j(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } j \leqslant n \\ \mathbf{1}_A(\omega)\Phi_j(\omega) & \text{nếu } j > n \end{cases}$$

với

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \omega \in A \\ 0 & \text{nếu } \omega \notin A, \end{cases}$$

trong đó $A = \{\omega : \tilde{G}_n(\Phi) < 0\}$. Vì Φ là dự đoán được và A là $\mathcal{F}_n$ đo được nên (Ψ_j) là dự đoán được. Hơn nữa

$$\tilde{G}_j(\Psi) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } j \leqslant n \\ \mathbf{1}_A(\tilde{G}_j(\Phi) - \tilde{G}_n(\Phi)) & \text{nếu } j > n. \end{cases}$$

Do đó $\tilde{G}_j(\Psi) \geqslant 0, \forall j \in (0, ..., N)$ và $\tilde{G}_N(\Psi) > 0$ trên A. Điều này mâu thuẫn với tính lành mạnh của thị trường. Suy ra đpcm.

(ii) Đặt $D = \{\tilde{G}_N(\Phi), \Phi$ dự báo được$\}$ là không gian vectơ con của không gian các biến ngẫu nhiên thực xác định trên Ω. Theo bổ đề 1.2.1 $D \cap \Gamma = \phi, D \cap K = \phi$ trong đó:

$$\Gamma \supset K = \{X \in \Gamma | \sum_{\omega} X(\omega) = 1\} \text{ - tập compact lồi.}$$

Theo định lý tách tập lồi, có tồn tại $(\lambda(\omega)), \omega \in \Omega$ sao cho:

1. $\forall X \in K, \sum\limits_{\omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0$
2. $\forall \Phi$ dự đoán được : $\sum\limits_{\omega} \lambda(\omega) \tilde{G}_N(\Phi)(\omega) = 0$.

Theo tính chất 1 ta suy ra $\lambda(\omega) > 0$ nên $P^*(\{\omega\}) = \dfrac{\lambda(\omega)}{\sum\limits_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega)}$ là xác suất tương đương với P. Theo tính chất 2 nếu ký hiệu E^* là kỳ vọng ứng với P^* ta có:

$$\begin{aligned} E^*(\tilde{G}_N(\Phi)) = 0 \Leftrightarrow & E^*(\sum_{j=1}^{N} \Phi_j \Delta \tilde{S}_j) = 0 \\ \Leftrightarrow & E^*(\sum_{j=1}^{N} \Phi_j^i \Delta \tilde{S}_j^i) = 0, i = 1 \div d \quad \forall \Phi \text{ dự báo được} \\ \Leftrightarrow & (\tilde{S}_n^1, ..., \tilde{S}_n^d) \text{ là } P^*\text{−martingale.} \end{aligned}$$

1.3 Thị trường đầy đủ và định giá các quyền lựa chọn

1.3.1 Thị trường đầy đủ

Ta sẽ định nghĩa một quyền lựa chọn loại châu Âu với thời điểm thực thi là N bằng cách cho một biến ngẫu nhiên $H \geqslant 0$, $\mathcal{F}_N$−đo được, H có thể coi là thu hoạch khi thực thi quyền lựa chọn mua hoặc bán trên một chứng khoán thứ nhất chẳng hạn với giá quy định là K. Ta có $H = (S_N^1 - K)^+$ cho quyền lựa chọn mua và $H = (K - S_N^1)^+$ cho quyền lựa chọn bán. Trong hai ví dụ trên biến ngẫu nhiên H chỉ là hàm của S_N.

Có quyền lựa chọn trong đó H phụ thuộc vào giá trị của chứng khoán cho đến thời điểm N, tức là phụ thuộc vào cả $S_0^1, S_1^1, ..., S_N^1$, đó là trường hợp quyền lựa chọn châu Á, trong đó $H = (\bar{S}_N - K)^+$ với $\bar{S}_N = \frac{1}{N+1}(S_0^1 + ... + S_N^1)$.

Định nghĩa 1.3.1. *Yêu cầu H là đạt được nếu tồn tại một chiến lược chấp nhận được sao cho hàm giá trị ứng với chiến lược đó tại thời điểm N là $V_N(\Phi) = H$.*

Nhận xét 1.3.1. Trong một thị trường lành mạnh để cho yêu cầu H ứng với quyền lựa chọn là đạt được, điều kiện đủ là có tồn tại chiến lược tự điều chỉnh về mặt tài chính Φ với $V_N(\Phi) = H$.

Thực vậy nếu Φ là chiến lược tự điều chỉnh tài chính và P^* là độ đo xác suất tương đương với P sao cho dưới độ đo P^* giá chiết khấu $\{\tilde{S}_n = \tilde{S}_n^1\}$ là $P^* - \Im-$martingale và vì vậy $\tilde{V}_n(\Phi) = E^*(\tilde{V}_N(\Phi)|\mathcal{F}_n)$. Rõ ràng nếu $\tilde{V}_N(\Phi) \geqslant 0$ (luôn luôn thỏa mãn nếu $V_N(\Phi) = H$) thì $\tilde{V}_n(\Phi) \geqslant 0\ \forall n$ và khi đó chiến lược Φ là chấp nhận được.

Định nghĩa 1.3.2. *Ta nói rằng thị trường là đầy đủ nếu tất cả các yêu cầu H đều đạt được.*

Giả thiết về tính đầy đủ của một thị trường tài chính là một giả thiết rất khắt khe và việc lý giải về mặt kinh tế khái niệm đó kém rõ ràng hơn giả thiết về tính lành mạnh của một thị trường. Tuy nhiên nếu thị trường là đầy đủ thì về mặt lý thuyết người ta có thể dễ dàng định giá và xây dựng chiến lược để đạt được yêu cầu H bất kỳ.

Mô hình Cox-Ross-Rubinstein nghiên cứu về sau sẽ cho ta ví dụ về mô hình của thị trường đầy đủ.

Định lý sau đây cho ta đặc điểm về một thị trường lành mạnh và đầy đủ.

Định lý 1.3.1. *Một thị trường là lành mạnh và đầy đủ khi và chỉ khi tồn tại duy nhất một độ đo (martingale) $P^* \sim P$, dưới P^* tất cả giá chiết khấu của các loại chứng khoán $\tilde{S}_n$ là $\Im - P^*-$martingale.*

Độ đo xác suất P^* sẽ được sử dụng như một phương tiện để định giá và xây dựng chiến lược đạt yêu cầu tài chính.

Chứng minh. a) Giả sử thị trường là lành mạnh và đầy đủ, khi đó mọi biến ngẫu nhiên $H > 0, \Im_N-$đo được đều có thể viết dưới dạng $V_N(\Phi) = H$, trong đó Φ là chiến lược tự điều chỉnh tài chính chấp nhận được để đạt yêu cầu H. Vì Φ là chiến lược tự điều chỉnh tài chính nên:

$$\frac{H}{S_N^0} = \tilde{V}_N(\Phi) = V_0(\Phi) + \sum_{j=1}^{N} \Phi_j.\Delta\tilde{S}_j.$$

Như vậy nếu P_1, P_2 là hai xác suất đối với chúng $(\tilde{S})$ là martingale thì $(\tilde{V}_n(\Phi))_{0\leqslant n\leqslant N}$ cũng là martingale.

Từ đó suy ra

$$E_i(\tilde{V}_N(\Phi)) = E_i(V_0(\Phi)) = V_0(\Phi)$$

$$\Leftrightarrow E_1(\frac{H}{S_N^0}) = E_2(\frac{H}{S_N^0}), \Leftrightarrow P_1 = P_2,$$

bởi vì với mọi $A \in \mathcal{F}$ nếu chọn $H = 1_A$ thì $P_1(A) = E_1(H) = E_2(H) = P_2(A)$.

b) Giả sử thị trường là lành mạnh nhưng không đầy đủ. Khi đó có tồn tại một biến ngẫu nhiên $H \geqslant 0$ và H không đạt được. Kí hiệu L là không gian các biến ngẫu nhiên dạng:

$$\nu_0 + \sum_{n=1}^{N} \Phi_n \tilde{S}_n$$

với ν_0 là $\mathcal{F}_0$ đo được và $(\Phi_n^1, ..., \Phi_n^d)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ là dự báo được.

Theo Mệnh đề 1.1.2 và nhận xét 1.3.1 ta có biến $\dfrac{H}{S_n^0} \notin L$.

Vậy L là không gian con thực sự của không gian các biến ngẫu nhiên xác định trên $(\Omega, \mathcal{F})$. Do đó nếu P^* là độ đo xác suất tương đương với P, với P^*, $(\tilde{S}_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ là martingale, và nếu ta trang bị cho không gian các biến ngẫu nhiên một tích vô hướng $(X, Y) = E^*(XY)$ thì có tồn tại biến ngẫu nhiên $X \neq 0$ và $X \perp L$. Đặt

$$P^{**}(\{\omega\}) = (1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}).P^*(\{\omega\})$$

trong đó $\|X\|_\infty = \sup\limits_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|$. Khi đó P^{**} lại là độ đo xác suất tương đương với P^* và $P^{**} \neq P^*$ vì $E^*(X) = 0$. Hơn nữa ta có $E^{**}(\sum\limits_{n-1}^{N} \Phi_n \Delta \tilde{S}_n) = 0$ cho tất cả các véctơ ngẫu nhiên $(\Phi_n = (\Phi_n^1, ..., \Phi_n^d))_{0 \leqslant n \leqslant N}$ dự báo được. Suy ra $\tilde{S}_n$ là $P^{**}-$martingale.

1.3.2 Định giá và xác định chiến lược đảm bảo yêu cầu tài chính trên thị trường đầy đủ

Xét một thị trường lành mạnh và đầy đủ, P^* là độ đo xác suất duy nhất sao cho dưới P^* các giá chứng khoán có chiết khấu là các martingale. Giả sử một yêu cầu $H \geqslant 0$ được xác định bởi một biến ngẫu nhiên $\mathcal{F}_N-$đo được và Φ là chiến lược chấp nhận được, đạt được yêu cầu H, tức là $V_N(\Phi) = H$.

Dãy $(\tilde{V}_n(\Phi))_{n \geqslant 0}$ là một P^*-martingale, do đó $V_0(\Phi) = E^*(\tilde{V}_N(\Phi))$, và vì vậy $(\tilde{V}_n(\Phi) = E^*(\dfrac{H}{S_N^0}|\mathcal{F}_n)$. Tổng quát hơn:

$$V_n(\Phi) = S_n^0 E^*(\frac{H}{S_N^0}|\mathcal{F}_n), \quad n = 0 \div N. \tag{1.3.1}$$

Giá trị của chiến lược Φ đạt yêu cầu H xác định hoàn toàn bởi H. Và lẽ tự nhiên ta gọi $V_n(\Phi)$ là giá trị của quyền lựa chọn: Đó là tài sản có được tại thời điểm n và nếu tuân theo chiến lược Φ bắt đầu từ thời điểm n cho phép ta tạo lập được một cách chính xác tài sản H tại thời điểm N.

Nếu tại thời điểm 0 nhà đầu tư bán quyền lựa chọn với giá

$$V_0 = E(\frac{H}{S_N^0}),$$

và nếu tuân theo chiến lược Φ thì ông ta có thể tạo lập lại tài sản đã hứa hẹn H tại thời điểm N, tức là ông ta có thể trang trải hoàn toàn lượng chi trả H mà ông ta cần có.

Nhận xét 1.3.2. Cần chú ý rằng việc tính giá cần thiết V_0 và V_n chỉ cần biết độ đo xác suất tương đương P^* mà không cần đến độ đo khách quan P. Như vậy để xác định V_n và chiến lược Φ người ta chỉ cần có một không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F})$ có trang bị một bộ lọc $\{\mathcal{F}_n\}$ tức là chỉ cần biết tất cả các trạng thái có thể có và sự tiến triển của tất cả các thông tin sử dụng được theo tiến trình thời gian.

Ngay sau khi không gian $(\Omega, \mathcal{F})$ và lọc $\{\mathcal{F}_n\}$ đã được xác định để định giá quyền lựa chọn người ta không cần xác định độ đo xác suất khách quan P của các trạng thái khác nhau (đặc biệt bằng phương pháp thống kê). Việc nghiên cứu mô hình Cox-Ross-Rubinstein sẽ chỉ rõ trong thực hành làm thế nào để tính được giá và chiến lược của quyền lựa chọn.

1.3.3 Tiếp cận đầu tiên về các quyền lựa chọn loại châu Mỹ

Quyền lựa chọn châu Mỹ có thể thực thi tại bất kì thời điểm nào từ 0 đến N. Ta sẽ xác định nó như là một dãy Z_n các biến ngẫu nhiên dương phù hợp với lọc $\mathcal{F}_n$ trong đó Z_n được hiểu như lợi ích khi thực thi quyền lựa chọn tại thời điểm n.

Trong trường hợp quyền lựa chọn mua loại châu Mỹ đối với chứng khoán thứ nhất với giá thực thi là K thì $Z_n = (S_n^1 - K)^+$, còn đối với quyền lựa chọn bán $Z_n = (K - S_n^1)^+$. Để xác định giá trị của quyền lựa chọn châu Mỹ gắn với dãy yêu cầu $\{Z_n\}$ chúng ta sẽ lý luận theo cách quy nạp lùi bắt đầu tại thời điểm cuối N. Rõ ràng rằng giá trị của quyền lựa chọn tại thời điểm N là $U_N = Z_N$. Với giá trị nào ta sẽ bán quyền lựa chọn tại thời điểm $N-1$? Nếu người mua thực thi ngay ông ta sẽ có một khoản Z_{N-1}, nếu không ông ta sẽ thực thi tại thời điểm N và người bán phải sẵn sàng trả một khoản Z_N ở thời điểm N. Vì vậy người bán cần phải dự trữ một khoản ít nhất bằng Z_{N-1} tại thời điểm $N-1$ và khoản đó cho phép người đó có thể xoay sở được một khoản Z_N tại thời điểm N. Khoản cần có sẵn tại thời điểm $N-1$ cho phép nhận được một khoản Z_N tại thời điểm N chính là giá trị của chiến lược chấp nhận được tại thời điểm $N-1$ với giá cuối cùng là Z_N, đại lượng đó cần phải bằng $S^0_{N-1}E^*(\tilde{Z}_N|\mathcal{F}_{N-1})$ với $\tilde{Z}_N = \dfrac{Z_N}{S^0_N}$. Vì vậy lẽ tự nhiên lấy giá trị:

$$U_{N-1} = \max(Z_{N-1}, S^0_{N-1}E(\tilde{Z}_N|\mathcal{F}_{N-1}))$$

làm giá trị của quyền lựa chọn châu Mỹ tại thời điểm $N-1$. Bằng phương pháp quy nạp lùi từng bước ta có thể xác định giá trị của quyền lựa chọn loại châu Mỹ tại thời điểm $n \in \{1 \div N\}$ bởi:

$$U_{n-1} = \max(Z_{n-1}, S^0_{n-1}.E(\frac{U_n}{S^0_n}|\mathcal{F}_{n-1})). \tag{1.3.2}$$

Trong trường hợp S^0_n là tài khoản ngân hàng với lãi xuất r ta có:

$$S^0_n = (1+r)^n.$$

Khi đó:

$$U_{n-1} = \max(Z_{n-1}.\frac{1}{1+r}E^*(U_n|\mathcal{F}_{n-1})).$$

Giả sử $\tilde{U}_n = \dfrac{U_n}{S^0_n}$ là giá trị chiết khấu của quyền lựa chọn loại châu Mỹ.

Mệnh đề 1.3.1. *Dãy $(\tilde{U}_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$là P^*-martingale trên, đó chính là P^*- martingale trên bé nhất vượt trội dãy $\{\tilde{Z}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$.*

Chú ý rằng khác với trường hợp quyền lựa chọn châu Âu, giá trị chiết khấu của quyền lựa chọn loại châu Mỹ không phải là một P^*-martingale.

Chứng minh. Từ hệ thức $\tilde{U}_{n-1} = \max(\tilde{Z}_{n-1}, E^*(\tilde{U}_n|\mathcal{F}_{n-1}))$ ta có $\tilde{U}_{n-1}$ là martingale trên và $\tilde{U}_{n-1} \geqslant \tilde{Z}_{n-1}$. Giả sử $\{\tilde{T}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ là một martingale trên và $\tilde{T}_n \geqslant \tilde{Z}_n$ $\forall n = 0 \div N$. Vậy $\tilde{T}_N \geqslant \tilde{U}_N$ (vì $\tilde{Z}_N = \tilde{U}_N$) và nếu $\tilde{T}_n \geqslant \tilde{U}_n$ ta cũng có:

$$\tilde{T}_{n-1} \geqslant E^*(\tilde{T}_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geqslant E^*(\tilde{U}_n|\mathcal{F}_{n-1}).$$

Vì vậy

$$\tilde{T}_{n-1} \geqslant \max(\tilde{Z}_{n-1}, E^*(\tilde{U}_n|\mathcal{F}_{n-1})) = \tilde{U}_{n-1}.$$

Như vậy $\{\tilde{T}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ vượt trội $\{\tilde{U}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ theo phương pháp quy nạp.

1.4 Mô hình Cox-Ross-Rubinstein

Mô hình Cox-Ross-Rubinstein là một kiểu rời rạc của mô hình Black-Scholes (mà ta sẽ nghiên cứu về sau). Trong mô hình này chỉ có một chứng khoán rủi ro với giá là S_n tại thời điểm $n, 0 \leqslant n \leqslant N$ và một chứng khoán không có rủi ro với lãi suất là r trong một thời kỳ $S_n^0 = (1+r)^n$. Ta giả thiết rằng sự tiến triển của chứng khoán có rủi ro giữa hai thời kỳ liên tiếp với sự biến đổi giá là a và b, $-1 < a < b$

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n(1+a), & \text{hoặc} \\ S_n(1+b), & \text{giá trị ban đầu } S_0 \text{ đã cho.} \end{cases}$$

Không gian giá trị của S_n chính là $\Omega = \{1+a; 1+b\}^N$ với mỗi bộ N giá trị biểu diễn các giá trị liên tiếp của tỉ số S_{n+1}/S_n, $n = 0, ..., N-1$.

Đặt $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ và $\mathcal{F}$ là các $\sigma-$đại số các tập con của Ω, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, ..., S_n), n = 1 \div N$ là $\sigma-$đại số các tập con của Ω cảm sinh bởi $S_1, ..., S_n, P$ là độ đo xác suất trên $(\Omega, \mathcal{F})$ sao cho $P(\{\omega\}) > 0$.

Đặt $T_n = S_n/S_{n-1} (n = 1 \div N)$. Nếu $(x_1, ..., x_N) \in \Omega$, ta đặt:

$$P\{(x_1, ...x_n)\} = P\{(T_1 = x_1, ...T_n = x_n)\}.$$

Việc biết P tương đương với việc biết luật phân bố của $T_1, ..., T_N$. Cần chú ý rằng $\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, ...T_n)$. Ta có các kết quả sau:

1. Giá chiết khấu $\{\tilde{S}_n = S_n/S_n^0\}_{0 \leqslant n \leqslant N}$ là một martingale dưới P khi và chỉ khi

$$E(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 1 + r, \forall n \in \{0, ..., N-1\}.$$

Thật vậy ta có:

$$\begin{aligned} & E(\tilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \tilde{S}_n \quad \text{(do } \tilde{S}_n \text{ là martingale).} \\ & \Leftrightarrow E(\tilde{S}_{n+1}/\tilde{S}_n|\mathcal{F}_n) = 1 \\ & \Leftrightarrow E(S_{n+1}/S_n|\mathcal{F}_n) = 1 + r \\ & \Leftrightarrow E(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 1 + r. \end{aligned}$$

2. Từ hệ thức trên suy ra rằng để cho thị trường (S_n^0, S_n^0) là lành mạnh điều kiện cần là $r \in (a, b)$.

Thậy vậy nếu thị trường là lành mạnh thì $\exists P^* \sim P$ dưới P^*, $\{\tilde{S}_n\}$ là $\mathcal{F}_n-$martingale. Theo kết quả 1 ta có $E^*(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 1 + r$,
$\Rightarrow E^*(T_{n+1}) = 1 + r$. Vì $T_{n+1} \in \{1+a, 1+b\}$ (theo giả thiết) chỉ lấy hai giá trị với các xác suất dương nên $1 + r \in (1+a, 1+b)$ hoặc $r \in (a, b)$.

3. Ví dụ về tình huống cơ lợi khi điều kiện trong kết quả 2 không được thực hiện.

Giả sử $r \leqslant a$. Nếu vay một khoản S_0 tại thời điểm 0 và mua một chứng khoán có rủi ro. Tại thời điểm N nhà đầu tư trả nợ sau khi bán chứng khoán đang giữ thì anh ta thu được khoản lợi là $S_N - S_0(1+r)^N$ luôn luôn $\geqslant 0$ vì $S_N \geqslant S_0(1+r)^n$ và hiệu đó là > 0 với xác suất dương.

Vậy ta có tình huống cơ lợi. Khi $r \geqslant b$ ta vay chứng khoán và bán đi để đầu tư vào S_n^0 ta được $S_0(1+r)^N - S_N \geqslant 0$.

4. Giả thiết rằng $r \in (a,b)$. Đặt $p = \dfrac{(b-r)}{(b-a)}$.$\{\tilde{S}_n\}$ là martingale đối với P khi và chỉ khi các biến ngẫu nhiên $T_1, ..., T_N$ là độc lập cùng phân bố với phân bố chung là:

$$P(T_1 = 1+a) = p = 1 - P(T_1 = 1+b).$$

Từ đó suy ra khi $r \in (a,b)$ thị trường (S_n^0, S_n) là thị trường đầy đủ và lành mạnh.

Thật vậy, nếu T_i là độc lập và

$$P(T_i = 1+a) = p = 1 - P(T_i = 1+b),$$

ta có:

$$E(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(T_{n+1}) = p(1+a) + (1-p)(1+b) = 1+r.$$

Vậy $\{\tilde{S}_n\}$ là $\mathcal{F}_n-$martigale dưới P (theo kết quả 1).

Ngược lại, nếu với $n = 0 \div N-1$ ta có $E(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 1+r$ thì ta có thể viết:

$$(1+a)E(1_{(T_{n+1}=1+a)}|\mathcal{F}_n) + (1+b)E(1_{(T_{n+1}=1+b)}|\mathcal{F}_n) = r+1$$

với

$$E(1_{(T_{n+1}=1+a)}|\mathcal{F}_n) + E(1_{(T_{n+1}=1+b)}|\mathcal{F}_n) = 1.$$

Ta suy ra:

$$E(1_{(T_{n+1}=1+a)}|\mathcal{F}_n) = p \text{ và } E(1_{(T_{n+1}=1+b)}|\mathcal{F}_n) = 1-p.$$

Bằng cách quy nạp lùi ta có:

$$P(T_1 = x_1, ..., T_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

trong đó $p_i = p$ nếu $x_i = 1+a; p_i = 1-p$ nếu $x_i = 1+b$.

Điều đó chứng tỏ rằng $T_1, ..., T_N$ là độc lập và cùng phân bố xác suất P xác định bởi $P(T_i = 1+a) = p = 1 - P(T_i = 1-b)$. Đó là độ đo xác suất duy nhất với nó $\{\tilde{S}_n\}$ là martigale. Vậy thị trường là lành mạnh và đầy đủ.

5. Ta ký hiệu C_n (tương ứng P_n) là giá trị tại thời điểm n của quyền lựa chọn mua (tương ứng bán) loại châu Âu với giá trị thực thi tại thời điểm N là K. Ta có kết quả sau:

a)

$$C_n - P_n = S_n - K(1+r)^{-(N-n)}. \quad (1.4.1)$$

Thật vậy ký hiệu E^* là kỳ vọng toán ứng với độ đo xác suất P^* với nó $(\tilde{S}_n)$ là martigale. Ta có:

$$\begin{aligned} C_n - P_n &= (1+r)^{-(N-n)} E^*((S_N - K)^+ - (K - S_N)^+ | \mathcal{F}_n) \\ &= (1+r)^{-(N-n)} E^*((S_N - K | \mathcal{F}_n) \\ &= S_n - K(1+r)^{-(N-n)}. \end{aligned}$$

Đẳng thức cuối cùng suy ra từ $\tilde{S}_n = S_n/(1+r)^n$ là P^*-martingale.

b) C_n có thể viết dưới dạng $C_n = c(n, S_n)$ trong đó C là hàm của n, S_n với các tham số K, a, b, r, p. Thật vậy, ta có thể viết

$$S_N = S_0 \prod_{i=1}^{N} T_i$$

do đó:

$$C_n = (1+r)^{-(N-n)} E^* \left(\left(S_n \prod_{i=n+1}^{N} T_i - K \right)^+ \middle| \mathcal{F}_n \right).$$

Vì dưới P^* các $T_{n+1}, ..., T_N$ độc lập với $\mathcal{F}_n$ và S_n là $\mathcal{F}_n$ đo được nên:

$$C_n = (1+r)^{-(N-n)} S_n E^* \left(\prod_{i=n+1}^{N} T_i - \frac{K}{S_n} \right)^+ \text{ với } S_n \text{ đã cho.}$$

Hơn nữa:

$$C(n,x)(1+r)^{N-n} = E^* \left(x. \prod_{i=n+1}^{N} T_i - K \right)^+,$$

do đó

$$\begin{aligned} &C(n,x) = (1+r)^{-(N-n)} \times \\ &\times \sum_{j=0}^{N-n} C_{N-n}^{j} p^j (1-p)^{N-n-j} (x(1+a)^j (1+b)^{N-n-j} - K)^+. \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

6. Chiến lược đạt mục tiêu của quyền lựa chọn mua được xác định bởi $\Phi_n = \Delta(n, S_{n-1})$ trong đó Δ là hàm được xác định dưới đây. Thật vậy: Ký hiệu Φ_n^0 là lượng chứng khoán không rủi ro giữ tại thời điểm n, ta có:

$$\Phi_n^0 (1+r)^n + \Phi_n S_n = c(n, S_n)$$

Vì Φ_n^0 và Φ_n là $\mathcal{F}_{n-1}$ đo được nên chúng là hàm của $S_1, ..., S_{n-1}$ và S_n lấy các giá trị $S_{n-1}(1+a)$ hoặc $S_{n-1}(1+b)$. Từ hệ thức trên ta có:

$$\Phi_n^0(1+r)^n + \Phi_n S_n(1+a) = c(n, S_{n-1}(1+a))$$

$$\Phi_n^0(1+r)^n + \Phi_n S_n(1+b) = c(n, S_{n-1}(1+b))$$

Trừ hai vế cho nhau ta được:

$$\Phi_n = \Delta(n, S_{n-1}) := \frac{c(n, S_{n-1}(1+b)) - c(n, S_{n-1}(1+a))}{S_{n-1}(b-a)} \tag{1.4.3}$$

Sau đó:

$$\Phi_n^0 = [c(n, S_n) - \Phi_n S_n](1+r)^{-n}.$$

7. Bây giờ ta có thể sử dụng mô hình đó để định giá quyền lựa chọn mua hoặc bán tại thời điểm T trên một chứng khoán. Chia $[0, T]$ thành N khoảng có độ dài bằng nhau và bằng $\frac{T}{N}$. Giả sử khi $N \to \infty$ các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$r = \frac{RT}{N}; \log\left\{\frac{(1+a)}{(1+r)}\right\} = -\frac{\sigma}{\sqrt{N}}; \log\left\{\frac{(1+b)}{(1+r)}\right\} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}},\ (a < r < b)$$

Số thực R được coi như lãi suất tức thời giữa các thời điểm 0 và T.

Vì $e^{RT} = \lim_{N\to\infty}(1+r)^N$ và σ^2 được coi như phương sai giới hạn với xác suất P^* khi $N \to \infty$ và S_N là giá trị của chứng khoán tại thời điểm T.

a) Nếu $(Y_N)_{N>1}$ là dãy các biến ngẫu nhiên dạng

$$Y_N = X_1^N + X_2^N + ... + X_N^N$$

sao cho với mỗi N các biến $X_1^N, ..., X_N^N$ là độc lập cùng phân bố với giá trị $(-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{\sigma}{\sqrt{N}})$ với giá trị trung bình μ_N sao cho $N\mu_N \to \mu$. Khi đó Y_N hội tụ theo phân bố đến biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$. Thật vậy: Có

$$\Phi_{Y_N}(u) = E(e^{iuY_N}) = \left[e^{-iu\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}p + e^{iu\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}(1-p)\right]^N$$

tương đương với

$$\ln \Phi_{Y_N}(u) = N \ln\left[e^{-iu\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}p + e^{iu\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}q\right].$$

Mà

$$e^{-iu\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} = 1 - iu\frac{\sigma}{\sqrt{N}} - \frac{1}{2}u^2\frac{\sigma^2}{N} + 0\left(\frac{\sigma^2}{N}\right),$$

$$e^{iu\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} = 1 + iu\frac{\sigma}{\sqrt{N}} - \frac{1}{2}u^2\frac{\sigma^2}{N} + 0\left(\frac{\sigma^2}{N}\right)$$

nên

$$pe^{-iu\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} + qe^{iu\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} = 1 + iu\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}p + \frac{\sigma}{\sqrt{N}}q\right) - \frac{1}{2}u^2\frac{\sigma^2}{N} + 0\left(\frac{\sigma^2}{N}\right).$$

Từ đó

$$\begin{aligned}\ln\Phi_{Y_N}(u) &= N\ln\left(1 + iu\mu_N - \frac{1}{2}u^2\frac{\sigma^2}{N} + 0\left(\frac{\sigma^2}{N}\right)\right)\\ &= N\left(iu\mu_N - \frac{1}{2}u^2\frac{\sigma^2}{N} + 0\left(\frac{\sigma^2}{N}\right) - u^2\mu_N^2 + 0\left(\frac{\sigma^2}{N}\right)\right)\\ &= iu(N\mu_N) - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 + u^2(N\mu_N)\mu_N + 0(1).\end{aligned}$$

Suy ra

$$\lim_{N\to\infty}\ln\Phi_{Y_N}(u) = iu\mu - \frac{1}{2}u^2\sigma^2$$

hay

$$\Phi_{Y_N}(u) \to e^{iu\mu - \frac{1}{2}u^2\sigma^2}.$$

b) Giá trị giới hạn của C_0 và P_0.
Cho N xác định ta có:

$$\begin{aligned}P_0^{(N)} &= (1 + RT/N)^{-N}E^*(K - S_0\prod_{i=1}^{N}T_n)^+\\ &= E^*((1 + RT/N)^{-N}K - S_0e^{Y_N})^+\end{aligned}$$

với

$$Y_N = \sum_{n=1}^{N}\log(Tn/(1+r)).$$

Với giả thiết đã nêu ta có

$$X_k^N := \log(T_k/(1+r)) \in \left\{ -\sigma/\sqrt{N}; \sigma/\sqrt{N}\right\}$$

là độc lập, cùng phân bố đối với độ đo xác suất P^*. Hơn nữa ta có:

$$E^*(X_j^N) = (1-2p)\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{2 - e^{\sigma/\sqrt{N}} - e^{-\sigma/\sqrt{N}}}{e^{\sigma/\sqrt{N}} - e^{-\sigma/\sqrt{N}}}.\frac{\sigma}{\sqrt{N}} := \mu_N$$

và $N\mu_N \to -\sigma^2/2$.

Vậy (Y) là dãy đã chỉ ra trong 7.a) với $\mu = -\sigma^2/2$.

Đặt $\Psi(y) = (Ke^{-RT} - S_0e^y)^+$ ta có:

$$\begin{aligned} |P_0^{(N)} - E^*(\Psi(Y_N))| &= \Big|E^*[(1+\frac{RT}{N})^{-N}((K - S_0e^{Y_N}))^+ - \\ &\quad - (Ke^{-RT} - S_0e^{Y_N})]^+\Big| \\ &\leqslant K|(1+\frac{RT}{N})^{-N} - e^{-RT}| \to 0. \end{aligned}$$

Vì vậy:

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} P_0^{(N)} &= \lim_{N\to\infty} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(Ke^{-RT} - S_0e^{-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma y}\right)^+ e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\ &= Ke^{-RT}N(-d_2) - S_0N(-d_1) \end{aligned}$$

trong đó:

$$d_1 = \frac{\log\left(\dfrac{x}{K}\right) + RT + \dfrac{\sigma^2}{2}}{\sigma};\ d_2 = d_1 - \sigma,$$

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{\frac{-t^2dt}{2}}.$$

Đối với quyền lựa chọn mua, sử dụng hệ thức "cặp đôi" (xem 1.4.1) ta có

$$\lim_{N\to\infty} C_0^N = S_0N(d_1) - Ke^{-RT}N(d_2).$$